

Fondamenti di Probabilità *

andrea venuti

March 20, 2024

*This PDF document is an inferior version of an [OER HTML page](#); [free/libre Org mode source repository](#).

Fondamenti di probabilita'

General

La prima parte consiste nel trovare metodi razionali per la caratterizzazione di fenomeni casuali La seconda parte invece consiste nel descrivere gli eventi (**segnali**) aleatori dipendenti dal tempo.

Definizioni generali

- **Evento** : risultato osservato;
- **Descrizione di un singolo evento** : associazione di un singolo evento del fenomeno casuale ad un valore reale mediante l'uso della probabilita' (**prob classica / prob. statistica**);
- **Insieme Campionario** Insieme formato da tutti i possibili risultati di un esperimento. Può essere continuo o discreto;
- **Classe** Insieme C formato da sottoinsiemi di S ;
- **Campo** Si denota con \mathcal{F} ed è una particolare classe in cui ogni elemento costituisce un evento L'utilizzo dei campi permette di definire in modo analitico gli eventi di modo che questi siano sempre associati a risultati dell' esperimento. Ad esempio in caso nel caso del lancio di una moneta abbiamo $\mathcal{F} = \{\emptyset, testa, croce, S\}$ con $S = \{testa, croce\}$ e con $P(s_i) = \frac{1}{2}$.
- **Variabile Aleatoria** Associa ad ogni risultato di un esperimento, oppure ad un sottoinsieme di risultati, un valore reale permettendo implicitamente una numerazione dello spazio campionario. Può essere discreta oppure continua a seconda se l'insieme campionario è discreto o continuo. In questo secondo caso si considerano solo intervalli.
- **Descrizione di esperimento** Raggruppamento dei possibili eventi di un fenomeno casuale con associazione di un evento casuale ad un valore reale (**variabili**

aleatorie) e rappresentazione mediante la **Funzione di distribuzione** e la funzione della **densità di probabilità** il cui gli argomenti sono le variabili aleatorie.

- **Indici di un esperimento** Insieme di valori che permettono di caratterizzare un esperimento conoscendo le v.a. senza ricorrere allo studio delle funzioni che lo descrivono.

Formalizzazione della definizione di Campo

1. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ significa che si può verificare l'evento o meno (appartenenza dell'insieme negato)
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ con $A \cup B = A + B$
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ con $A \cap B = A * B$ (probabilità condizionata)
4. $\emptyset, S \in \mathcal{F}$

Quando le proprietà 2 e 3 valgono per ogni evento di \mathcal{F} si ha un campo di Borel;

Formalizzazione della definizione di una v.a.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

La Probabilità

in riferimento alla fig ?? la definizione classica di probabilità e' :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

che si giustifica la definizione, infatti se la probabilità e' la misura della superficie allora la probabilità totale e' la somma delle superficie dei sottoinsiemi A e B meno la superficie comune;

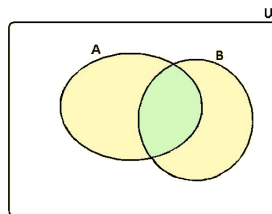


Figure 1: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Postulati della Probabilità

1. $P(A) \geq 0 \forall A$;

2. $P(S) = 1$ $P(\emptyset) = 0$;
3. $\forall A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ eventi mutuamente esclusivi;
4. $\forall A \cap B \neq \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Teorema dell'esperimento

Usando le proprietà della FDD una funzione $G(x)$ reale rappresenta una funzione di distribuzione se :

1. $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
2. $G(\infty) = 1$
3. $G(-\infty) = 0$
4. $G(x_1) \leq G(x_2) \forall x_1 \leq x_2$

COROLLARIO : Se esiste una funzione $G(x)$ con le proprietà di cui sopra allora esiste un esperimento E t.c. la funzione di distribuzione dell'esperimento è coincide con $G(x)$.

Descrizione dell'evento mediante funzioni

Funzione di distribuzione di probabilità - FDP

La funzione di distribuzione di probabilità (FDP), detta anche funzione di ripartizione cumulativa di una variabile aleatoria X è una funzione che descrive la probabilità che X assuma un valore inferiore o uguale a un certo valore x_i . In altre parole, la FDP fornisce la probabilità che l'evento $X \leq x_i$ si verifichi e ne rappresenta il grafico. La definizione formale è:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^i f_X(x_i) dx & \text{in campo continuo} \\ \sum_{k=-\infty}^i P(X = x_i) & \text{in campo discreto} \end{cases}$$

(2)

Proprietà della FDP

- La FDP è una funzione non decrescente;
- La FDP è sempre compresa tra 0 e 1;
- $F_X(-\infty) = 0$ evento impossibile;
- $F_X(\infty) = 1$ evento certo;
- Se X è una variabile aleatoria continua la FDP è una funzione continua infatti :

$$F_X(x_0^-) - F_X(x_0^+) = \int_{-\infty}^{x_0^-} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_0^+} f(x) dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} f(x) dx = 0 \quad (3)$$

- Se X è una v.a. discreta il grafico della FDP presenta discontinuità (limiti dx e sx tendono ad un valore diverso) a sx della v.a. l'ampiezza del salto indica la probabilità associata all'i-esima v.a. $F_X(x_i) = P_X(X \leq x_i) \neq 0$. Ad esempio nel lancio di un dado vale 1/6. Da notare che le probabilità a sx e a dx vogliono, rispettivamente, $P_X(X \leq x_0)$ e $1 - P_X(X \leq x_0)$ e per ogni intervallo $[x_i, x_i + 1)$ la $F_X(x_i)$ rimane costante .

Metodo Pratico di calcolo della FDP

Sia N il numero di esperimenti o realizzazione della v.a. la funzione fdp, e sia $\#$ il numero di prove con l'esito sperato.

$$F_X(x) \approx \frac{\#\{x \leq X\}}{N} \quad (4)$$

Funzione di densità di probabilità - fdp

La fdp una funzione che descrive la probabilità che una variabile aleatoria continua assuma un certo valore. È una funzione non negativa, il cui integrale su tutto l'insieme di definizione di S è uguale a 1. La fdp può essere utilizzata per calcolare probabilità, medie, varianze e per modellare fenomeni reali. Definita come :

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (5)$$

La fdp rappresenta una probabilità solo quando si considera un intervallo e non quando è puntuale cioè :

(6)

Proprietà della fdp

1. $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$;
3. $P(\{x_1 < x(s) \leq x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$;

La probabilità che X assuma un valore in un certo intervallo $[x_1, x_2]$ è uguale all'integrale della PDF su quell'intervallo:

(7)

Metodo pratico di calcolo fdp

Sia N il numero di esperimenti o realizzazione della v.a. la funzione fdp, e sia # il numero di prove con l'esito sperato.

(8)

Posizione di due v.a.

v.a. indipendenti

Due v.a. sono indipendenti quando

$$p(X_0, X_1) = p(X_0)p(X_1)$$

Probabilità condizionata - teorema di Bayes

probabilità che si verifichi l'evento x_1 quando si verifica x_0

$$p(X_1|X_0) = \frac{p(X_1, X_0)}{p(X_0)}$$

- $P(X_1 | X_0)$ rappresenta la probabilità dell'evento X_1 dato che l'evento X_0 si è verificato, detta anche probabilità condizionata di X_1 rispetto a X_0 .
- $P(X_0)$ e $P(X_1)$ sono le probabilità marginali di X_0 e X_1 rispettivamente, cioè le probabilità di X_0 e X_1 senza alcuna condizione.

In termini più intuitivi, il teorema di Bayes afferma che la probabilità che un evento X_0 si verifichi, data l'occorrenza di un evento X_1 , è proporzionale alla probabilità dell'evento X_1 , dato che l'evento X_0 si è verificato, moltiplicata per la probabilità dell'evento X_0 , e divisa per la probabilità dell'evento X_1 .

Probabilità Congiunta

Modella il concetto di un esperimento descritto con n v.a. (teoria per $n = 2$):

Siano X, Y due v.a. definite come :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{9}$$

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{10}$$

Funzione di distribuzione di probabilità - FDP

In modo analogo a come si è definita l'analogha funzione per una variabile si ha che la FDP in più variabili è definita come

(11)

in cui

(12)

Vettore di v.a.

Sia $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]$ un vettore di v.a. allora la definizione di funzione di probabilita' diviene come quella indicata nella (??)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n F_X(x_1, \dots, x_n)}{\delta_1 x \dots \delta_n} \quad (13)$$

Momenti di una v.a

Sono indici che descrivono il comportamento di una v.a. e l'ordine indica il numero di v.a. considerate

Media o Valore atteso

Analoga alla media matematica. quando la media e' nulla allora una **probabilita' equa** significa che si ha la stessa probabilita' che un evento si verifichi o meno. Dal punto di vista analitico per v.a. continue la $f(x)$ e' simmetrica.

- Media del primo ordine

1. **v.a. discrete** : $\mu_x = E(X) = \sum_{x_i} p_i x_i$

2. **v.a. continua** : $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

- Media del secondo ordine

1. **v.a. discrete** : $\mu_{xy} = E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j f(x, y)$

2. **v.a. continue** : $\mu_{xy} = E(XY) = \int_X \int_Y xy f_{XY}(x, y) dx dy$

- (a) **Medie marginali (o valori attesi marginali)**: Le medie marginali di X e Y sono definite rispettivamente come:

i. $\mu_x = E(X) = \int x f_X(x) dx$

ii. $\mu_y = E(Y) = \int y f_Y(y) dy$

dove $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ sono le densità marginali di X e Y rispettivamente.

È importante notare che la media congiunta è una misura del valore atteso del prodotto di X e Y, mentre le medie marginali rappresentano i valori attesi di X e Y singolarmente, ignorando l'altra variabile.

Le proprietà dei valori attesi sono cruciali nella comprensione della teoria delle probabilità e delle statistiche, poiché forniscono misure di tendenza centrale nelle distribuzioni delle variabili casuali.

Varianza, Covarianza e Correlazione

E' una misura della variabilita' della v.a. . La sola media non e' sufficiente a caratterizzare una v.a. allora si definisce una variabile intesa come la sommatoria della differenze tra la media e le singole v.a. . Essendo una sommatoria puo' accadere che la somma sia nulla e allora si usa il quadrato delle singole differenze.

- **Varianza** (primo ordine)

1. **v.a. discreta** : $\sigma^2 = \sum_i (E(X) - x_i)^2$;

2. **v.a. continua** : $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (E(X) - x)^2 f(x) dx$

- **Covarianza** (secondo ordine) Indica come le variazioni di una variabile sono associate alle variazioni dell'altra variabile.

$$Cov_{XY} = E\{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} = \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p_{ij} & \text{v.a. discrete} \\ \iint_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{xy}(x, y) dx dy & \text{v.a. continue} \end{cases} \quad (14)$$

- **Correlazione** Questa equazione deriva da quella della covarianza ma con v.a. a media nulla e le conclusioni sono le stesse della covarianza.

$$R_{xy} = E\{xy\} = \iint_{-\infty}^{\infty} xy f_{xy}(x, y) dx dy \quad (15)$$

Per la covarianza

1. Valori positivi indicano che entrambe le variabili tendono ad essere superiore alla sua media.
2. Valori negativi indicano che quando una variabile è superiore alla sua media, l'altra tende ad essere inferiore alla sua media.
3. Covarianza nulla indica che non c'è una relazione lineare diretta tra le variazioni delle due variabili.

Potenza

Nel caso di v.a. con media nulla la varianza coincide con la definizione di **potenza** :

$$E\{x^2(\omega)\} = \int x^2 f_x(x) dx \quad (16)$$

Scarto quadratico medio o deviazione standard e covarianza

- Utilizzata per poter confrontare media e varianza per momenti del primo ordine e' definita come $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ il cui risultato deve essere interpretato come la distanza delle v.a. dal valor medio.
- Come per i momenti primo ordine anche con la covarianza il problema è che la sua scala dipende dalle unità di misura delle variabili coinvolte, il che la rende difficile da interpretare. Per mitigare questo problema, spesso si utilizza il coefficiente di correlazione, che è una versione normalizzata della covarianza. Il coefficiente di correlazione è definito come

$$\rho_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1, 1] \quad (17)$$

Relazioni tra i momenti

$$C_{xy} = R_{xy} - \mu_x \mu_y \quad (18)$$

- quando sono due v.a. sono incorrelate quando si ha :
 - indipendenza statistica : $E\{x(s)y(s)\} = E\{x(s)\}E\{y(s)\}$;
 - $C_{xy} = 0$;

NB : non è vera l'affermazione che se due v.a. sono indipendenti allora sono incorrelate. L'indipendenza statistica è molto più forte della correlazione quanto coinvolge la definizione della fdp

V.A. Gaussiane

Densità di probabilità Gaussiana

Una v.a. Gaussiana è caratterizzata dalla seguente pdf I parametri della pdf m_x e σ_x^2 coincidono con la media e la varianza della v.a. x;

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x}} \quad (19)$$

Si può dimostrare che i momenti centrali di una v.a. Gaussiana sono dati da

(20)

V.A. Complessa

Definizione

Dalla definizione ricavata dal * a pag 190 una v.a. complessa è una funzione del tipo $Z(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ avente struttura di un numero complesso $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$ e pertanto la relazione tra DDP e ddp è ridefinita come segue :

$$F_{Z(\omega)}(z(\omega)) = F_{Z(\omega)}(x_\omega, y_\omega) = \int_{I_z=[I_x, I_y]} z f_{Z(\omega)}(z) dz = \int_{I_x} \int_{I_y} f_{x(\omega), y(\omega)}(x, y) dx dy = \int_{I_x} \int_{I_y} (f_{reale}(\omega) + j f_{immagin.}(\omega)) dx dy \quad (21)$$