

Serie di Fourier

andrea venuti

October 27, 2024

Contents

1	Premessa	3
1.1	Prodotto Interno o scalare	3
1.2	Norma	4
1.3	Distanza tra vettori	5
1.4	Versori	5
1.5	Disuguaglianza di Swartz	6
1.6	Vettori Ortonormali	7
2	Dimostrazione del significato della disuguaglianza di Swartz	7
2.1	Definizione dell'angolo tra vettori	7
3	Coeficiente della SDF	8
3.1	Proiezione di un vettore lungo un altro	8
3.1.1	Dimostrazione	8

3.2	Relazione tra proiezione e angolo tra vettori (significato di prodotto interno)	9
3.3	SDF per un segnale non periodico	12
4	SDF in forma reale	13
4.1	SDF in forma trigonometrica	13
4.2	SDF in modulo e fase (polare)	14
4.3	Spettro di un segnale	14
5	Convergenza della SDF	15
5.1	Condizione di Dirichlet	16
6	Proprietà della SDF	17
7	Esempio	19

1 Premessa

1. In uno spazio metrico è possibile definire il concetto di distanza su cui si basa la definizione di limite di modo da mantenere inalterata la teoria dell'analisi;
2. Tutti i segnali misurabili in energia/potenza rappresentano uno spazio metrico in cui ogni segnale può essere rappresentato come un vettore;
3. La distanza in uno spazio metrico vettoriale è definita come la norma della differenza : $||\vec{g} - \vec{w}||$;
4. La definizione di norma si basa sulla definizione di **prodotto interno** ;
5. Il **prodotto interno**¹ è quell'operazione t.c. se applicata a due vettori rende possibile **associare uno scalare**² **anche nullo (vettori ortogonali) appartenente allo stesso campo sul quale sono definiti i vettori.**

Gli spazi con le caratteristiche di cui sopra sono quelli di **Hilbert**.

1.1 Prodotto Interno o scalare

In uno spazio vettoriale, un prodotto interno è una funzione che associa a ciascuna coppia di vettori un numero appartenente allo stesso campo delle componenti dei vettori. In pratica se le componenti sono reali il prodotto interno è un numero reale. Questa funzione soddisfa alcune proprietà, come la linearità e la simmetria. Nel caso di un vettore coincide anche con il quadrato della norma.

A livello geometrico rappresenta la proiezione

¹Il prodotto interno coincide anche con il prodotto della proiezione di un primo vettore su di un secondo moltiplicata la lunghezza del secondo.

²per scalare si intende un elemento appartenente allo spazio di definizione

$$\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle = \int |g(t)w^c(t)|d_t \quad (1)$$

da notare che nella precedente definizione l'argomento dell'integrale e' una somma di monomi e nel caso di vettori finiti si ha³ :

$$\langle g, w \rangle = \sum_{i=1}^n g_n w_n^T \quad (2)$$

in cui l'argomento della sommatoria vale

$$(3) \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix}$$

1.2 Norma

E' la radice quadrata del prodotto interno applicato ad uno stesso vettore. E' uno scalare è reale

$$||\vec{v}|| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \quad (4)$$

$$||\vec{g}|| = (\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle)^{1/2} = \left(\int |g(t)g^c(t)|d_t \right)^{1/2} \quad (5)$$

1. Positività: $w \geq 0$, e $w=0$ sse $w=0$;

³fonte <http://www.dm.unibo.it/~regonati/al1112/al111216.pdf>

2. Omogeneità: $\alpha w = \alpha w$ per ogni scalare α ;
3. Disuguaglianza triangolare: $v + w \leq v + w$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

1.3 Distanza tra vettori

Questa misura rappresenta la distanza percorsa lungo gli assi ortogonali per raggiungere il punto di destinazione.

$$d(\vec{g}, \vec{w}) = \|\vec{g} - \vec{w}\| = \|\vec{k}\| = \left(\int_a^b |k(t)k^c(t)| d_t \right)^{1/2} \quad (6)$$

in cui l'intervallo $[a, b]$ è quello di definizione dei segnali e può essere illimitato. Distanza e norma possono essere messe in relazione tramite :

$$d(\vec{g}, 0) = \left(\int |g(t) - 0| d_t \right)^{1/2} = \left(\int (|g(t)g^c(t)|)^2 d_t \right)^{1/2} = |\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle|^{1/2} = \|\vec{g}\| \quad (7)$$

la norma di un vettore è la sua distanza dall'origine.

1.4 Versori

Vettori con norma unitaria definiti come nella 8. Il versore mantiene la stessa direzione del vettore originale, questo rende i versori utili in situazioni in cui è importante descrivere solo la direzione di un vettore senza preoccuparsi della sua magnitudine.

Ad esempio, se hai un vettore velocità $\vec{g}$ che rappresenta il movimento di un oggetto e vuoi descrivere solo la direzione del movimento indipendentemente dalla velocità effettiva, puoi utilizzare il versore

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|} \quad (8)$$

1.5 Disuguaglianza di Swartz

L'ineguaglianza di Schwartz impone un limite superiore al prodotto scalare che e' massimo quando i due vettori sono allineati.

$$|<, >| \leq ||g|| ||w||$$

(9)

$$\begin{aligned} <\vec{g}, \vec{w}> \leq |<\vec{g}, \vec{w}>| \leq |<\vec{g}, \vec{w}>|^2 \\ &= \int |g(t)w^c(t)|^2 dt = \\ \int |g(t)|^2 |w^c(t)|^2 dt &\leq \int |g(t)|^2 dt \int |w^c(t)|^2 dt = \\ &||\vec{g}||^2 ||\vec{w}||^2 \end{aligned} \quad (10)$$

da cui

$$<\vec{g}, \vec{w}> \leq ||\vec{g}||^2 ||\vec{w}||^2 \quad (11)$$

Dalla 11 si ha

$$\frac{<\vec{g}, \vec{w}>}{||\vec{g}||^2 ||\vec{w}||^2} \leq 1 \quad (12)$$

$$\frac{|<\vec{g}, \vec{w}>|}{||\vec{g}||^2 ||\vec{w}||^2} \leq 1 \quad (13)$$

$$\frac{|<\vec{g}, \vec{w}>|}{||\vec{g}|| ||\vec{w}||} \leq 1 \quad (14)$$

che vale 1 solo se i vettori sono linearmente indipendenti (vds (16)) cioe' l'angolo tra vettori e' 0 linearmente dipendenti, mentre vale 0 se l'angolo tra vettori e' $\frac{\pi}{2}$. In pratica la disuguaglianza indica se due vettori sono linearmente indipendenti oppure se sono dipendenti.

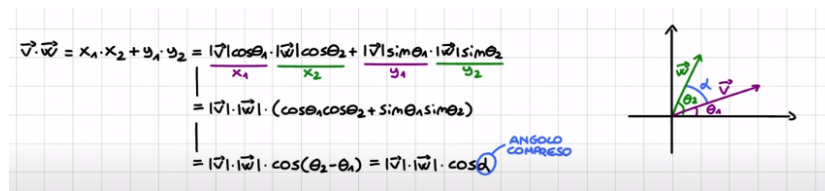
1.6 Vettori Ortonormali

Versori a due a due perpendicolari cioè versori a due a due in cui la loro disuguaglianza di S. è nulla.

2 Dimostrazione del significato della disuguaglianza di Swartz

2.1 Definizione dell'angolo tra vettori

Questa parte dimostra come sono legate le norme e il prodotto interno all'angolo tra vettori. Per vettori reali in riferimento alla figura seguente abbiamo che



The image shows a handwritten derivation of the dot product formula for two vectors $\vec{v}$ and $\vec{w}$ in a 2D coordinate system. The derivation is as follows:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \frac{x_1}{|\vec{v}| \cos \theta_1} \cdot \frac{x_2}{|\vec{w}| \cos \theta_2} + \frac{y_1}{|\vec{v}| \sin \theta_1} \cdot \frac{y_2}{|\vec{w}| \sin \theta_2} \\ &= |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

The final result is labeled "ANGOLO COMPRESO" with a blue arrow pointing to the angle θ . To the right of the derivation is a diagram showing a 2D coordinate system with two vectors, $\vec{v}$ (green) and $\vec{w}$ (purple), originating from the origin. The angle between them is labeled θ . The components x_1, y_1 for $\vec{v}$ and x_2, y_2 for $\vec{w}$ are indicated with dashed lines.

Figure 1: Angolo tra vettori

Nel caso di vettori complessi

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle)}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \quad (15)$$

da cui

$$\operatorname{Re}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) = |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = \cos(\theta) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \quad (16)$$

dove nella (16) si evince la relazione tra disuguaglianza di Swartz e angolo tra vettori.

3 Coefficiente della SDF

Scopo di questa parte di teoria e' dimostrare che il coefficiente della SDF di segnali visti come vettori e' la somma delle proiezioni del segnale originale (valore della)

3.1 Proiezione di un vettore lungo un altro

In riferimento alla fig 2 si ha la (17)

$$P_w(v) = \frac{\langle \vec{v} \times \vec{w} \rangle}{||w||^2} \vec{w} \quad (17)$$

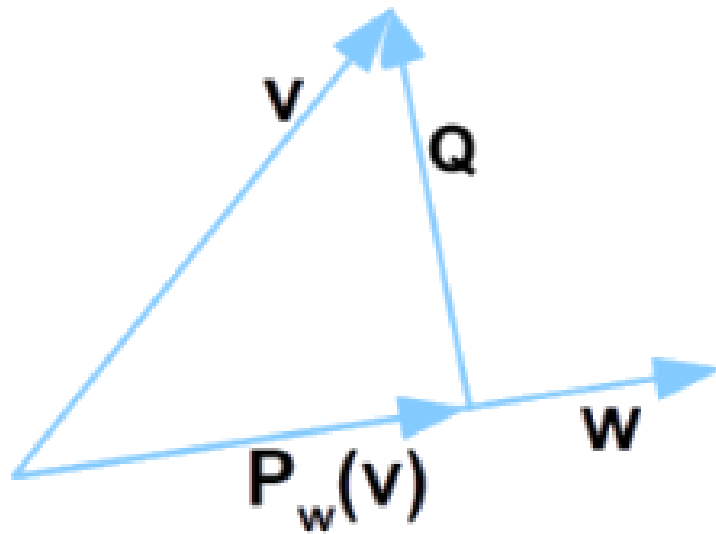


Figure 2: Proiezione di v su w

3.1.1 Dimostrazione

Considerato che $P_w(v)$ coincide in parte con $\vec{w}$ allora

$$P_w(v) = \lambda w \quad (18)$$

La dimostrazione consiste nel trovare λ .

$$\vec{v} = P_w(\vec{v}) + \vec{Q} \quad (19)$$

$$\langle \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle (P_w(\vec{v}) + \vec{Q}) \times \vec{w} \rangle \quad (20)$$

$$\langle \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle P_w(\vec{v}) \times \vec{w} \rangle + \langle \vec{Q} \times \vec{w} \rangle \quad (21)$$

ma

$$\langle \vec{Q} \times \vec{w} \rangle = 0 \quad (22)$$

perche' $Q \perp w$ per cui

$$\langle \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \lambda \vec{w} \times \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{w} \times \vec{w} \rangle \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{\langle \vec{v} \times \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \quad (24)$$

facendo riferimento alla (18) la (24) diventa

$$P_w(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v} \times \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w} \quad (25)$$

3.2 Relazione tra proiezione e angolo tra vettori (significato di prodotto interno)

Se si considera il versore $vers(w)$ la (17) diventa

$$P_w(v) = \langle \vec{v} \times \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \rangle \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \langle \vec{v} \times vers(w) \rangle vers(w) \quad (26)$$

inoltre dalla (15) si ottiene l'espressione geometrica del prodotto scalare :

$$\cos(\theta)(\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad (27)$$

in cui se consideriamo il versore di $\vec{w}$ abbiamo

$$\langle \vec{v}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \rangle = \cos(\theta) \|\vec{v}\| \|\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\| = \cos(\theta) \|\vec{v}\| \quad (28)$$

moltiplicando ambo i membri dalla (28) otteniamo

$$\langle \vec{v}, \text{vers}(w) \rangle \text{vers}(w) = \cos(\theta) \|\vec{v}\| \text{vers}(w) = c_v \text{vers}(w) \quad (29)$$

ricordando la (26) otteniamo

$$P_w(\vec{v}) = \cos(\theta) \|\vec{v}\| \text{vers}(w) = c_v \text{vers}(w) \quad (30)$$

in cui nella (30) c_v puo' essere interpretato come la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

Così come la (32) rappresenta il vettore $\vec{V}$ (vds fig. ??) la SDF rappresenta il segnale g all'istante t (vds fig. 3). L'argomento della SDF e' la somma degli n segnali sinusoidali $e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$ ognuno dei quali di ampiezza G_n . Nel caso si usino i vettori per rappresentare i segnali allora la SDF puo' essere interpretata come la somma delle norme dei vettori $G_n e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$.

In entrambi, quello del vettore e quello della SDF, l'argomento e' il prodotto di due parti in cui il primo e' un coefficiente ottenibile mediante prodotto interno e il secondo e' un versore :

- per il vettore : $v_i = \langle \vec{v}, w \rangle$ i -esima proiezione di V lungo il versore w_i
- per la SDF : il coefficiente moltiplicativo G_n (vds (31)) per l' n -esima sinusoide;

$$G_n = \langle g(t), e^{j2\pi \frac{n}{T}t} \rangle \quad (31)$$

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad (32)$$

./img/cartesiane.gif

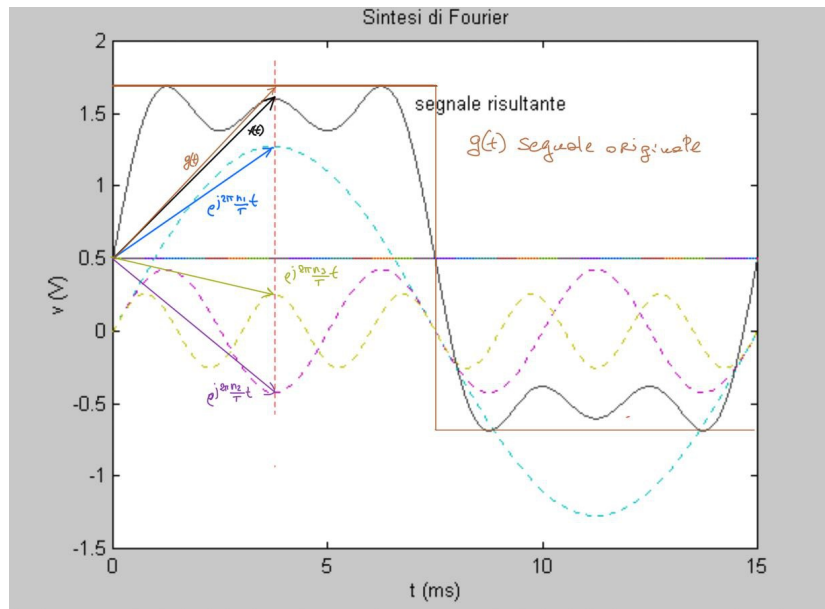


Figure 3: Significato della SDF

- se la base $\vec{e}$ completa il vettore $\vec{v}$ $\vec{e}$ è rappresentato esattamente;
- se la base non è completa abbiamo un'approssimazione con un errore $\vec{x} \perp \vec{e}$ - vds fig. 4. Per capire l'errore basta guardare la fig 3 in cui il segnale $x(t)$ è il risultato di una SDF parziale ($[n_1, n_2, n_3]$) che differisce dal segnale $g(t)$ e la differenza tra il $\vec{e} = \vec{g} - \vec{x}$ che è perpendicolare alla proiezione di $\vec{x}$ lungo il versore dell'asse delle ascisse;

Nella pratica comune una qualsiasi funzione periodica $x(t)$ di periodo T può essere rappresentata nel suo spazio di esistenza da versori complessi del tipo $\frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi \frac{k}{T}t}$ per cui il coefficiente della SDF diventa :

eraloid rrlenz ctar efatextwidth

Figure 4: Particolare dalla fig 3 che rappresenta il vettore errore

$$c_k = \langle g(t), \frac{e^{j2\pi \frac{k}{T}t}}{\sqrt{T}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T}t} dt$$

(33)

Per cui la **SDF complessa** diventa come la seguente in cui ogni termine $c_k(t)$ e' una sinusoide :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi \frac{k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k e^{j2\pi \frac{k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) \quad (34)$$

con

$$G_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T}t} dt \quad (35)$$

3.3 SDF per un segnale non periodico

VDS Trasformata di Fourier

4 SDF in forma reale

Partendo dall'osservazione che

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} G_k e^{j2\pi \frac{k}{T}t} + G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k e^{j2\pi \frac{k}{T}t} \quad (36)$$

invertendo la prima parte della 36 e cambiando di segno all'indice si ottiene⁴

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} e^{j2\pi \frac{-k}{T}t} + G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k e^{j2\pi \frac{k}{T}t} \quad (37)$$

per cui se $\phi = e^{j2\pi \frac{k}{T}t}$ allora $\phi^c = e^{j2\pi \frac{-k}{T}t}$ e $G_{-k} = G_k^c$, dunque

$$g(t) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [G_k^c \phi^c + G_k \phi] \quad (38)$$

infine ricordando che per le funzioni reali che $g(t) = X^c(t)$ se anche $G_k^c \phi^c = G_k \phi$.

4.1 SDF in forma trigonometrica

Per il passaggio alla forma reale trigonometrica

$$\phi = e^{j2\pi \frac{k}{T}t} = \cos(2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T}t) \quad (39)$$

ricordando la struttura di un numero complesso $G_k = A_k + jB_k$ la (38) diventa

$$\begin{aligned} G_k \phi_k + G_k^c \phi_k^c &= G_k [\cos(2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T}t)] + G_k^c [\cos(-2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(-2\pi \frac{k}{T}t)] = \\ &= G_k [\cos(2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T}t)] + G_k^c [\cos(2\pi \frac{k}{T}t) - j \sin(2\pi \frac{k}{T}t)] = \\ &= \dots = 2 \operatorname{Re}\{G_k\} \cos(2\pi \frac{k}{T}t) + 2 \operatorname{Im}\{G_k\} \sin(2\pi \frac{k}{T}t) = \\ &= \frac{A_k}{2} \cos(2\pi \frac{k}{T}t) - \frac{B_k}{2} \sin(2\pi \frac{k}{T}t) \end{aligned} \quad (40)$$

⁴l'inversione dell'indice non introduce il cambio di segno

Per cui la (38) la SDF diventa un polinomio trigonometrico del tipo

$$g(t) = \frac{A_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} \cos(2\pi \frac{k}{T} t) - \frac{B_k}{2} \sin(2\pi \frac{k}{T} t) \quad (41)$$

in cui

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(2\pi \frac{k}{T} t) dt \quad (42)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin(2\pi \frac{k}{T} t) dt \quad (43)$$

NB : quando g(t) reale pari $B_k = 0$ quando è reale ed dispari $A_k = 0$.

4.2 SDF in modulo e fase (polare)

Per esprimere la SDF in modulo e fase basta osservare che

$$G_k = |G_k| e^{j\theta} \quad (44)$$

per cui la (38) può essere riscritta come segue

$$g(t) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| e^{j\theta_k} [e^{j2\pi \frac{k}{T} t} + e^{-j2\pi \frac{k}{T} t}] = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| 2e^{j\theta_k} \frac{[e^{j2\pi \frac{k}{T} t} + e^{-j2\pi \frac{k}{T} t}]}{2} = G_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| \cos(2\pi \frac{k}{T} t + \theta_k) \quad (45)$$

in cui G_0 rappresenta il valor medio del segnale.

4.3 Spettro di un segnale

Al fine di meglio comprendere il concetto di spettro di ampiezza e fase si osservi la seguente figura

NB : si definisce fase $\angle G_k = \theta_k$ per cui

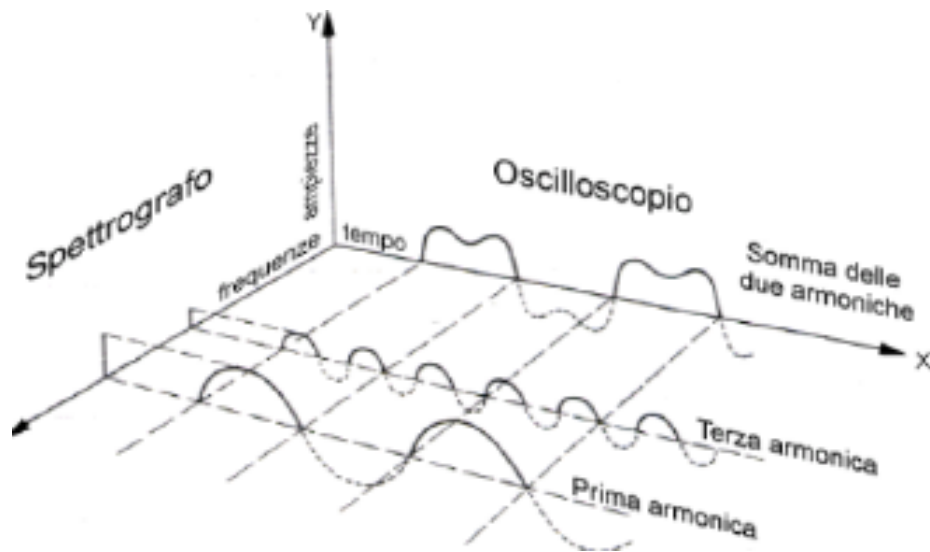


Figure 5: spettro

$g(t)$	Modulo	Fase	svil. trigonom.
reale	$G_k^c = G_{-k}$	$\angle G_k^c = -\angle G_{-k}$	cos e sin
reale pari	$G_k = G_{-k}$	$\angle G_k^c = 0$	solo cos
reale dispari	$G_k = -G_{-k}$	$\angle G_k^c \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$	solo sin

5 Convergenza della SDF

La convergenza della serie di Fourier è un concetto importante nell'analisi matematica e nella teoria delle serie. La serie di Fourier è utilizzata per rappresentare una funzione periodica come una somma infinita di seni e coseni (o complessi esponenziali). La questione della convergenza è legata a determinare in quali condizioni questa somma infinita approssima correttamente la funzione data.

La serie di Fourier di una funzione

Per quanto riguarda la convergenza, ci sono diverse condizioni che devono essere soddisfatte affinché la serie di Fourier converga alla funzione $f(x)$ su tutto il suo dominio. Alcune di queste condizioni includono:

1. La funzione $f(x)$ deve essere periodica con periodo T .
2. La funzione $f(x)$ deve essere integrabile su ogni intervallo finito.
3. La funzione $f(x)$ deve avere un numero finito di punti di discontinuità di prima specie (discontinuità a salto finito).

Queste condizioni garantiscono la convergenza puntuale della serie di Fourier. Tuttavia, in alcuni casi, potrebbero verificarsi fenomeni come la convergenza in media quadratica o la convergenza puntuale solo in punti di continuità. La teoria della convergenza della serie di Fourier è abbastanza complessa e coinvolge strumenti matematici come la teoria della misura, la teoria dell'integrazione, e il concetto di convergenza in spazi di Hilbert.

In generale, se una funzione soddisfa le condizioni necessarie, la serie di Fourier tende a convergere alla funzione originale quando il numero di termini nella serie aumenta, avvicinandosi sempre di più alla funzione data.

5.1 Condizione di Dirichlet

La condizione di Dirichlet è una delle condizioni che possono essere utilizzate per garantire la convergenza della serie di Fourier per una funzione periodica. Essa è comunemente formulata per una funzione

La condizione di Dirichlet richiede che:

1. La funzione $f(x)$ deve essere periodica e di banda limitata, il che significa che deve avere un numero finito di massimi e minimi su ogni periodo T .
2. Il numero di punti in cui $f(x)$ ha discontinuità di prima specie (discontinuità a salto finito) deve essere finito su ogni periodo T .

In altre parole, la condizione di Dirichlet impone limiti alla crescita della funzione e al numero di discontinuità per garantire la convergenza della serie di Fourier.

La formulazione matematica della condizione di Dirichlet può essere più precisa, ma l'idea generale è quella di garantire che la funzione sia "abbastanza regolare" e non cresca in modo eccessivo per garantire la convergenza della serie di Fourier.

Se una funzione soddisfa la condizione di Dirichlet, allora la sua serie di Fourier converge puntualmente ai valori di $f(x)$ nei punti di continuità di $f(x)$ e ai punti di discontinuità di $f(x)$ dove $f(x)$ ha limiti destro e sinistro.

La condizione di Dirichlet è una delle condizioni più comuni utilizzate per garantire la convergenza della serie di Fourier, ma ci sono anche altre condizioni, come la condizione di Riemann-Lebesgue, che possono essere utilizzate per studiare la convergenza delle serie di Fourier in contesti specifici.

6 Proprietà della SDF

- **comportamento asintotico di c_k :**
 - sia n l'ordine di differenziabilità di $g(t)$;
 - sia k l'ordine di derivabilità di $g(t)$;
 - allora nei punti in cui la SDF di $g(t)$ converge $c_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ con velocità $O(\frac{1}{|k|^{n+1}})$;
 - L'ordine di differenziabilità coincide con quello di derivabilità quando una funzione è continua mentre se l'ordine differenziabilità è maggiore di quello di derivabilità la funzione è continua a tratti ;
 - maggiore è l'ordine di differenziabilità maggiore è la regolarità della funzione e tanto più velocemente c_k andrà a zero.
- **linearità** i coefficienti della SDF di un segnale combinazione lineare di altri segnali sono combinazioni lineari dei coefficienti di ogni singola SDF. In

conseguenza anche gli spettri sono combinazione lineare di tutti i singoli spettri.

- **traslazione temporale** i coefficienti della SDF di un segnale traslato nel tempo sono anch'essi traslati nel tempo, cioè : $x(t - t_0) \Rightarrow c_k(t_0) = c_k \frac{1}{\sqrt{(T)}} e^{j2\pi \frac{k}{T} t_0}$.

7 Esempio

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$$

Dal confronto con la forma polare dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale periodico si ricavano i coefficienti della Serie di Fourier

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_n)$$

$$\text{Da questo confronto si ricava } |S_1| = \frac{a}{2}, \vartheta_1 = 0 \text{ e}$$

$$|S_n| = 0, \vartheta_n = 0, \forall n \neq 1$$

Visto che il segnale è reale si ha $S_n^* = S_{-n}$

$$S_1 = \frac{a}{2} e \quad S_{-1} = \frac{a}{2}$$

Figure 6: esempio di calcolo del modulo e fase