Questions / Note | Scope | Page

Rapporto SNR dB

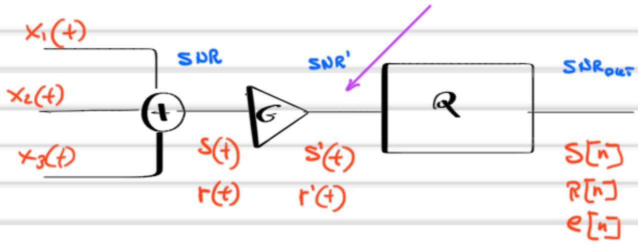
TESTO

Siano dati 3 segnali analogici gaussiani a media nulla e varianza uguale a 1 con un SNRdb nella banda d'interesse di 30db. Inoltre siano i tre segnali incorrelati e che il segnale risultante venga convertito con un quantizzatore con dinamica [-1,1] e 8 bit. Determinare

1. Il guadagno all'ingresso del quantizzatore
2. SNRdb all'uscita del quantizzatore

SCHEMA

$$P'_S = E[s'(t)^2] = E[G^2 s(t)^2] = E\left[\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2 (\sqrt{3})^2\right] = \frac{1}{16}$$



$$SNR = \frac{s(t)}{r(t)} = 30db$$ SPECIFICA

$\boxed{\text{SEGNALI INCORRELATI}}$ →

$$\begin{cases} s(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 3 \implies \sigma = \sqrt{3} \end{cases}$$

varianza totale — deviazione standard

Calcolo GUADAGNO

Per segnali di tipo gaussiano una buona scelta della dinamica di un segnale è 4σ per cui

$$G = \frac{1}{4\sigma} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

SNR all'ingresso

$$SNR' = \frac{E[s'(t)^2]}{E[r'(t)^2]} = \frac{E[G^2 s(t)^2]}{E[G^2 r(t)]} = \frac{\cancel{G^2} E[s(t)^2]}{\cancel{G^2} E[r(t)^2]} = SNR$$

SNR all'uscita

$$SNR_{out} = \frac{E[s[n]^2]}{E[r[n]^2] + E[e[n]^2]}$$

Per i calcoli è molto più pratico utilizzare l'inverso dell'SNRout di modo da ottenere due rapporti indipendenti

$$\frac{1}{SNR_o} = \frac{E[r[n]^2]}{E[s[n]^2]} + \frac{E[e[n]^2]}{E[s[n]^2]} = \frac{1}{SNR_o} = \frac{1}{SNR_i} + \frac{1}{SNR_q}$$

$$= \frac{1}{SNR_o} = \frac{1}{SNR_i} + \frac{1}{SNR_q}$$

Questions / Note	Scope
Potenza dell'errore	$P_e = E[e[n]^2] = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\frac{D^2}{2^{28}}}{12} = \frac{D^2}{2^{28}} \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{2^{28}} \cdot \frac{1}{\frac{12}{3}} = \frac{2^{-28}}{3}$
Calcolo SNRout	$\frac{1}{SNRq} = \frac{P_e}{P_s} = \frac{\frac{2^{-28}}{3}}{\frac{1}{16}} = 16\,\frac{2^{-28}}{3} = \frac{16}{3}\,2^{-16} =$
	$= \frac{16}{3}\,10^{\log 2^{-16}} = \frac{16}{3} \cdot 10^{-16\log 2} = 5{,}33\,10^{-16\log 2} =$
	$= 5{,}33 \cdot 10^{-16 \cdot 0{,}3} = 5{,}33 \cdot 10^{-4{,}8} = 5{,}33 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-0{,}8} =$
	$= 10^{-4} \cdot 0{,}8$
	$\frac{1}{SNRout} = \frac{1}{SNRi} + \frac{1}{SNRq} = 10^{-3} + 0{,}8 \cdot 10^{-4} = 10^{-3}(1 + 0{,}08) = 1{,}08 \cdot 10^{-3}$
	$SNRout = \frac{1}{1{,}08} \cdot 10^3 = 0{,}92592 \cdot 10^3 = 925{,}92$
Calcolo SNRo db	$SNRo\,db = 10\log SNRo = 10\log 925{,}92 = 29{,}6\ db$
Conclusioni	Il campionamento aggiunge rumore, aumentando il numero di bit diminuisce la potenza dell'errore di conseguenza il degrado del segnale.

Questions / Note | Scope | Page

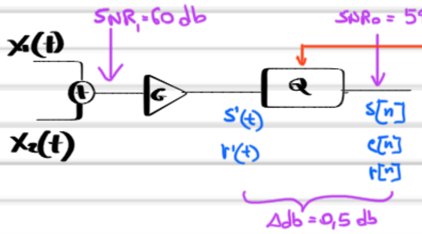
Esercizio – SNR segnali sinusoidali

Scopo Calcolo dell'SNR per segnali deterministici come, ad esempio, quelli sinusoidali.

Testo

Si ha $s(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$ $\begin{cases} f_1 = 1000\ Hz \\ f_2 = 2000\ Hz \end{cases}$
che è affetto da rumore additivo, tale che $SNR_i = 60$ dB. Si vuole calcolare i bit necessari ad avere $\Delta_{dB} = 0{,}5$ dB ($SNR_o = 59{,}5$ dB).

Schema



Interpretazione

- Forma generica di un segnale sinusoidale $x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$
  ampiezza massima (A); frequenza fondamentale (f); ritardo/anticipo di fase (ϕ)
- Potenza del segnale $P_x = E[x(t)^2] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f t + \phi)\,dt$ = int. per parti
- Bitrate: numero di bit · frequenza campionamento
- Somma di segnali sinusoidali $s(t) = x_1(t) \underset{\text{somma algebrica}}{+} x_2(t)$

$$s(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = 1\cdot\cos[2\pi(1000)t + \phi_1] + 1\cos[2\pi(2000)t + \phi_2]$$

max ampiezza $s(t) = 2$

- Potenza errore quantizzatore $P_e = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\frac{4}{2^{2B}}}{12} = \frac{1}{2^{2B}3} = \frac{2^{-2B}}{3}$ Potenza standard per un quantizzatore ... dinamica $= 2$

Guadagno $G = \frac{1}{2}$

Calcolo SNR

$$SNR'_i = \frac{E[s'(t)^2]}{E[r'(t)^2]} = \frac{E[\cancel{G^2} s'(t)^2]}{E[\cancel{G^2} r'(t)^2]} = SNR_i = 60\ db$$

Calcolo $E[s(t)^2]$

$$\boxed{E[s(t)^2]} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[\cos(2\pi f_1 t + \phi) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)]^2 dt = \frac{1}{T}\Big(\overbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1)dt}^{1/2} +$$

$$+ \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(2\pi f_2 t + \phi_2)\,dt}_{1/2} + \underbrace{\cancel{2\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi f_1 t + \phi_1)\cos(2\pi f_2 t + \phi_2)\,dt}}_{=0}\Big) = \ldots = 1$$

Questions / Note — Scope		Page

Calcolo SNRout

$$SNR_o = \frac{E[s[n]^2]}{E[r[n]^2] + \underbrace{E[e[n]^2]}_{P_e}} \Rightarrow$$ più comodo l'inverso $$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{1}{SNR_o}}}_{\frac{1}{10^6 \cdot 10^{-0,05}}} = \overbrace{\underbrace{\boxed{\frac{E[r[n]^2]}{E[s[n]^2]}}}_{1/10^6}}^{1/SNR_i} + \overbrace{\boxed{\frac{P_e}{E[s[n]^2]}}}^{1/SNR_q} =$$

$$\frac{1}{SNR_q} = \frac{\frac{2^{-2B}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\, 2^{-2B} = 1{,}33\; 2^{-2B} \Rightarrow SNR_q = \frac{1}{1{,}33\, 2^{-2B}} = \frac{1}{1{,}33} \cdot 2^{2B}$$

$$\frac{1}{SNR_q} = \frac{1}{SNR_O} - \frac{1}{SNR_i} = \frac{1}{10^{5,85}} - \frac{1}{10^6} = \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-0,05}} - \frac{1}{10^6} =$$

$$= 10^6 \cdot 10^{0,05} - 10^{-6} = 10^{-6}\left(10^{0,05} - 1\right) = 10^{-6}\left(1{,}122 - 1\right) =$$

$$= 10^{-6} \cdot 0{,}122$$

$$\frac{1}{SNR_q} = \frac{1}{10^{-6}\, 0{,}122} = 10^6 \cdot \frac{1}{0{,}122} = 8{,}195 \cdot 10^6$$

$$1{,}33 \cdot 2^{2B} = 8{,}195 \cdot 10^6$$

$$2^{2B} = \frac{8{,}195}{1{,}33} \cdot 10^6 = 6{,}16$$

$$\cancel{2}B = \mathrm{lu}\; 6{,}16 \cdot 10^6 = \cancel{6}_{3}\, \mathrm{lu}\; 61{,}6 = 12{,}36 \Rightarrow 13\,B$$

Questions / Note	Scope: Esercizio	Page

Sia $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, dove $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due segnali sinusoidali affetti da rumore, cioè $x_1(t) = 5\cos(2\pi 1000t + \phi_1) + r_1(t)$ e $x_2(t) = 2\sin(2\pi 1500t + \phi_2) + r_2(t)$. Si supponga di campionare $x(t)$ alla frequenza di campionamento $f_c = 10000$ Hz, e che i rapporti tra la potenza di segnale e di rumore valgano, nella banda di interesse, $SNR_1 = 45$ dB e $SNR_2 = 40$ dB per i segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$, rispettivamente. Il segnale $x(t)$ viene convertito in formato numerico mediante un quantizzatore con dinamica in ingresso (-1,1) e numero di bit per campione uguale a B.

Determinare:

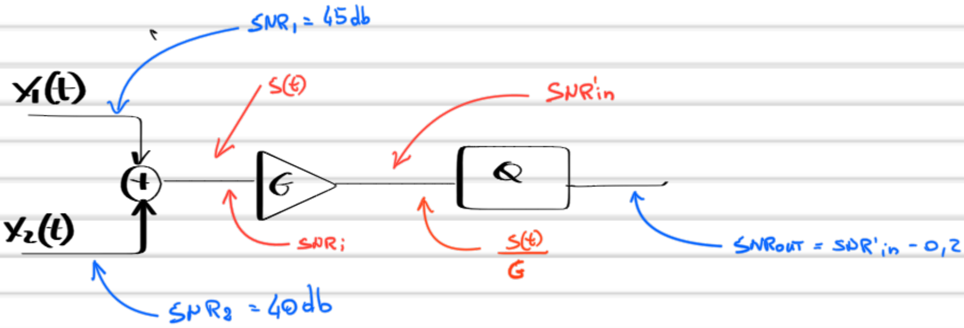
(a) il guadagno da inserire all'ingresso del quantizzatore affinché sia evitato il problema dell'overflow;

(b) il rapporto tra potenza di segnale e di rumore SNR_{in} all'ingresso del quantizzatore;

(c) il numero di bit B affinché il rapporto tra potenza di segnale e di rumore SNR_{out} all'uscita del quantizzatore sia degradata, al massimo, di 0.2 dB rispetto a SNR_{in};

(d) lo spettro del segnale campionato (relativamente alla sola parte deterministica) in frequenze normalizzate.

SCHEMA



STUDIO DEI SEGNALI

$x_1(t) = 5\cos(2\pi \underbrace{1000}_{} t + \phi_1) + r_1(t) \Rightarrow 5 =$ ampiezza max

$x_2(t) = 2\sin(2\pi \underbrace{1500}_{f \text{ portante}} t + \phi_2) + r_2(t) \Rightarrow 2 =$ ampiezza max

$s(t) = x_1(t) + x_2(t)$ si possono sommare in quanto determinati $\Rightarrow 7$ ampiezza max

$E_1[x_1(t)^2] = \frac{A_1^2}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow SNR_1 = \frac{E[x_1(t)^2]}{E[r_1(t)^2]} \Rightarrow E[r_1(t)^2] = \frac{E[x_1(t)^2]}{SNR_1} = \frac{A_1^2}{2} \cdot 10^{-4,5}$

CALCOLO DEL GUADAGNO (a)

$E_2[x_2(t)^2] = \frac{A_2^2}{2} = 2 \Rightarrow E[r_2(t)^2] = \frac{A_2^2}{2 \, SNR_2} = 2 \cdot 10^{-4}$

$G = \frac{1}{\max|s(t)|} = \frac{1}{7}$

CALCOLO SNRin

$SNR_{in} = \frac{E[x_1(t)^2] + E[x_2(t)^2]}{E[r_1(t)^2] + E[r_2(t)^2]} = \frac{\frac{25}{2} + 2}{\frac{25}{2} \cdot 10^{-4,5} + 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{\frac{29}{2}}{10^{-4}(\frac{25}{2} \cdot 10^{-0,5} + 2)} = \frac{14,5}{5,95 \cdot 10^{-4}} = 2,43 \cdot 10^4$

$SNR_{in\,dB} = 10 \log SNR_{in} = 10 \log 2,43 \cdot 10^4 = 10 \log 2,43 + 10 \log 10^4 =$
$= 3,8 + 40 = 43,8$ db

CALCOLO SNR'in (b)

$SNR'_{in} = SNR_{in}$

CALCOLO DEI BIT (c) $SNR_{out} = SNR_{in} - 0{,}2 = 43{,}6$

$$\frac{1}{SNR_{out}} = \frac{1}{SNR_{in}} + \boxed{\frac{\frac{2^{-2B}}{3}}{\boxed{\left(\frac{A_1^2}{2}+\frac{A_2^2}{2}\right)\frac{1}{G^2}}}} \qquad \frac{1}{SNR_q}$$

$$\boxed{\left(\frac{25}{2}+2\right)\frac{1}{49}} = \frac{29}{2}\cdot\frac{1}{49} = \frac{29}{98} = 0{,}29$$

$$\frac{2^{-2B}}{3\cdot 0{,}29} = \frac{1}{0{,}88}\cdot 2^{-2B} = 10^{-4{,}36} - 10^{-4{,}38} = 10^{-4}\left(10^{-0{,}36} - 10^{-0{,}38}\right) =$$

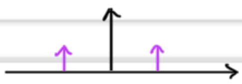
$$= 10^{-4}\left(0{,}43 - 0{,}41\right) = 0{,}02\cdot 10^{-4}$$

$$2^{-2B} = 0{,}02\cdot 0{,}88\cdot 10^{-4} = 0{,}016\cdot 10^{-4}$$

$$-2B = \ln 0{,}016 + \ln 10^{-4} = -4{,}13 - 4\ln 10 = -4{,}13 - 4\cdot 2{,}30 =$$

$$-2B = -4{,}13 - 9{,}2 = -13{,}33 \Rightarrow B \approx 6{,}65 \Rightarrow B = 7$$

Spettro (d) frequenze normalizzate $F = \dfrac{f \text{ portante di } x(t)}{f \text{ campionamento}}$

spettro del segnale  di un segnale sinusoidale

parte deterministica: solo segnale utile no rumore

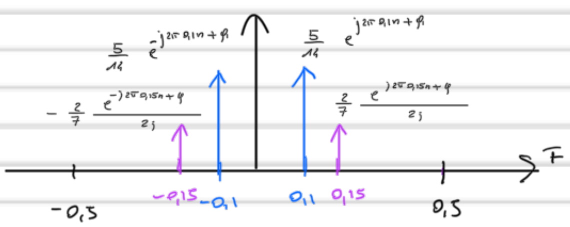
Rappresentazione del segnale dopo il campionamento

$$x_1(t) = A_1'\cos\left(2\pi\frac{1000}{10^4}n + \varphi_1\right) = \frac{A_1}{G}\cos\left(2\pi\, 0{,}1n + \varphi_1\right) = \frac{5}{7}\cos\left(2\pi\, 0{,}1n + \varphi_1\right) =$$

$$= \frac{5}{7}\,\frac{e^{j2\pi 0{,}1n+\varphi_1} + e^{-j2\pi 0{,}1n+\varphi_2}}{2} = \frac{5}{14}e^{j2\pi 0{,}1n+\varphi_1} + \frac{5}{14}e^{-j2\pi 0{,}1n+\varphi_1}$$

$$x_2(t) = A_2'\sin\left(2\pi\frac{1500}{10^4}n + \varphi_2\right) = \frac{2}{7}\sin\left(2\pi\, 0{,}15n + \varphi_2\right) = \frac{2}{7}\,\frac{e^{j2\pi 0{,}15n+\varphi_2} - e^{-j2\pi 0{,}15n+\varphi_2}}{2j}$$

$$= \frac{2}{7}\,\frac{e^{+j2\pi 0{,}15n+\varphi_2}}{2j} - \frac{2}{7}\,\frac{e^{-j2\pi 0{,}15n+\varphi}}{2j}$$



Conclusioni: Nello schema su indicato manca il blocco campionatore che si trova prima del sommatore in quanto segnali devono essere campionati separatamente.